**专题13 焦点三角形的面积公式**

**一、结论**

**1、椭圆中焦点三角形面积公式**

**在椭圆()中,,分别为左、右焦点,为椭圆上一点,,的面积记为，则：**

**①**

**②**

**③,其中.**

**2、双曲线中焦点三角形面积公式**

**在双曲线(,)中,,分别为左、右焦点,为双曲线上一点,，的面积记为，则：**

**①**

**②**

**③**

**注意：在求圆锥曲线中焦点三角形面积时，根据题意选择适合的公式，注意结合圆锥曲线的定义，余弦定**

**理，基本不等式等综合应用.**

**二、典型例题**

1．（2022·湖北·天门市教育科学研究院高二期末）已知、是椭圆的两个焦点，是椭圆上一点，，则的面积是（ ）

A． B． C． D．

【答案】D

【详解】

由椭圆的方程可得，，，则，

因为，则，

即，即，解得，

因此，.

故选：D.

**另解：根据焦点三角形面积公式，求,其中，由题意知，，代入**

**【反思】焦点三角形问题，常规方法往往涉及到圆锥曲线的定义，利用定义，余弦定理求解，特别提醒，在圆锥曲线中，定义是解题的重要工具.另外作为二级结论，要特别注意记忆表示的是哪个角.**

2．（2022·吉林吉林·高三期末（理））已知*P*是椭圆上一动点，，是椭圆的左、右焦点，当时，；当线段的中点落到*y*轴上时，，则点*P*运动过程中，的取值范围是（ ）

A． B．

C． D．

【答案】A

【详解】

设.

在中，当时，由椭圆的定义，余弦定理得：

整理得：

由三角形的面积公式得：，解得：.

因为线段的中点落到*y*轴上，又*O*为的中点，所以轴，即.

由，得，解得：，所以，

代入椭圆标准方程得：.

又有，解得：，所以椭圆标准方程为：.

所以.

因为，所以.

所以.

因为，

当时，，

所以.

故选：A.

****

**另解：根据焦点三角形面积公式，求,其中，由题意知，代入公式，又当线段的中点落到*y*轴上时，，可知，从而有，，且，进一步有：所以椭圆标准方程为：.**

**所以.**

**因为，所以.**

**所以.**

**因为，**

**当时，，**

**所以.**

**故选：A.**

**【反思】解析几何中与动点有关的最值问题一般的求解思路：**

**①几何法：利用图形作出对应的线段，利用几何法求最值；**

**②代数法：把待求量的函数表示出来，利用函数求最值.**

3．（2022·安徽省亳州市第一中学高二阶段练习）已知双曲线，过原点的直线与双曲线交于，两点，以线段为直径的圆恰好过双曲线的右焦点，若的面积为，则双曲线的离心率为（ ）

A． B． C．2 D．

【答案】B

【详解】

解：设双曲线的左焦点为，连接，，

因为以为直径的圆恰好经过双曲线的右焦点，

所以，圆心为，半径为，

根据双曲线的对称性可得四边形是矩形，设，，

则，由可得，

所以，所以，所以.

故选：B.

 **另解：解：设双曲线的左焦点为，连接，，**

**因为以为直径的圆恰好经过双曲线的右焦点，**

**所以，且,根据双曲线焦点三角形面积公式：得：，结合，得.**

****

**【反思】在双曲线中，涉及焦点三角形，优先联想到定义，即,结合余弦定理求解，对于适合利用焦点三角形公式的题目，可直接利用公式.**

4．(多选）（2022·广东·模拟预测）已知双曲线*C*：的左、右焦点分别为，点双曲线*C*右支上，若，的面积为，则下列选项正确的是（       ）

A．若，则*S*＝

B．若，则

C．若为锐角三角形，则

D．若的重心为*G*，随着点*P*的运动，点*G*的轨迹方程为

【答案】ACD

【详解】

由，得，则

焦点三角形的面积公式，将代入可知，故A正确．

当*S*＝4时，，由，可得，故 B错误．

当时，*S*＝4，当时，，因为为锐角三角形，所以，故C正确．

设，则，由题设知，则，所以，故D正确．

故选：ACD

**【反思】在双曲线中，涉及焦点三角形，优先联想到定义，即,结合余弦定理求解，对于适合利用焦点三角形公式的题目，可直接利用公式.**

**三、针对训练 举一反三**

**一、单选题**

1．（2022·福建漳州·高二期末）已知椭圆的左、右焦点分别为、，点在椭圆上，若，则的面积为（       ）

A． B． C． D．

【答案】B

【详解】

在椭圆中，，，则，所以，，

由椭圆的定义可得，

取的中点，因为，则，

由勾股定理可得，



所以，.

故选：B.

2．（2022·福建南平·高二期末）椭圆两焦点分别为，，动点在椭圆上，若的面积的最大值为12，则此椭圆上使得为直角的点有（       ）

A．个 B．个 C．个 D．个

【答案】A

【详解】

解：因为的面积的最大值时，点*P*在短轴的顶点处，所以，即，

又，所以，所以，则，所以，所以此椭圆上使得为直角的点有个，

故选：A.

3．（2022·江西鹰潭·高二期末（文））椭圆*C*：的焦点为，，点*P*在椭圆上，若，则的面积为（       ）

A．48 B．40 C．28 D．24

【答案】D

【详解】

椭圆*C*：的半焦距，长半轴长，由椭圆定义得，

而，且，则有是直角三角形，，

所以的面积为24.

故选：D

4．（2022·安徽省亳州市第一中学高二期末）设是椭圆的两个焦点，是椭圆上一点，且.则的面积为（       ）

A．6 B． C．8 D．

【答案】B

【详解】

解：由椭圆的方程可得，

所以，得

且，，

在中，由余弦定理可得

，

而，所以，，

又因为，，所以，

所以，

故选：B

5．（2022·甘肃·永昌县第一高级中学高二期末（理））椭圆的左右焦点为､，为椭圆上的一点，，则的面积为（       ）

A．1 B． C． D．2

【答案】C

【详解】

∵点是椭圆上的一点，､是焦点，

∴，即①，

∵在△中，

∴②，

①-②得：，.

故选：C.

6．（2021·北京市第五十七中学高二阶段练习）已知椭圆：，，分别为它的左右焦点，，分别为它的左右顶点，点是椭圆上的一个动点，下列结论中错误的是（       ）

A．离心率 B．的周长为18

C．直线与直线斜率乘积为定值 D．若，则的面积为8

【答案】D

【详解】

由，可得，，，

A，离心率，故A正确；

B，的周长为，故B正确.

C，设，，故C正确；

D，，，

又因为，所以，

即，解得,

所以，故D错误.

故选：D

7．（2021·黑龙江·大庆中学高二期末）已知，分别为椭圆的左右焦点，为坐标原点，椭圆上存在一点，使得，设的面积为，若，则该椭圆的离心率为（       ）

A． B． C． D．

【答案】D

【详解】

由题意，故为直角三角形，

，

又，

，

又为直角三角形，故，

，

即，

.



故选：D.

8．（2022·山西运城·高二期末）已知点是双曲线的左､右焦点，以线段为直径的圆与双曲线在第一象限的交点为，若，则（       ）

A．与双曲线的实轴长相等

B．的面积为

C．双曲线的离心率为

D．直线是双曲线的一条渐近线

【答案】B

【详解】

因为，又由题意及双曲线的定义可得：，

则，，所以A不正确；

因为在以为直径的圆上，所以，

所以，所以B正确；

在△中，由勾股定理可得，

即，所以离心率，

所以C不正确；

由C的分析可知：，故，所以渐近线的方程为，

即，所以D不正确；

故选：B．

9．（2022·内蒙古赤峰·高三期末（理））已知双曲线的两个焦点为，，为双曲线上一点，，的内切圆的圆心为，则（       ）

A． B． C． D．

【答案】A

【详解】

解：因为双曲线的两个焦点为，，为双曲线上一点，，

所以，，，

因为，所以，

设的内切圆的半径为，

则，即，解得，

如图，设的内切圆与边相切于点，则，，

所以，

所以

故选：A



10．（2022·广东·执信中学高三阶段练习）已知双曲线**C**的离心率为是*C*的两个焦点，*P*为*C*上一点，，若的面积为，则双曲线*C*的实轴长为（       ）

A．1 B．2 C．3 D．4

【答案】B

【详解】

根据双曲线的定义，可得：

又：

解得：，

双曲线**C**的离心率为，则有：

在中，由余弦定理，可得：

则有：

的面积为，可得：

解得：

故双曲线*C*的实轴长为：2

故选：B

11．（2022·广西玉林·模拟预测（文））已知双曲线的左，右焦点为，*P*为双曲线右支上的一点，，*I*是的内心，则下列结论错误的是（       ）

A．是直角三角形 B．点*I*的横坐标为1

C． D．的内切圆的面积为

【答案】D

【详解】

由已知可得，，设，则，得，所以，即，所以，所以A正确；设内接圆半径为，则，得，所以*I*的坐标为，面积为所以B正确，D错误；由题意，，所以C正确；

故选：D.



12．（2022·天津和平·高二期末）双曲线的两个焦点分别是，点是双曲线上一点且满足，则的面积为（       ）

A． B． C． D．

【答案】C

【详解】

，所以，，，

在双曲线上，设，，

①，

由，在中由余弦定理可得：

，

故②，

由①②可得，

直角的面积.

故选：C.

13．（2022·全国·高三专题练习）是双曲线右支上的一点，，是左，右焦点，，则的内切圆半径为（       ）

A． B．

C． D．

【答案】D

【详解】

解：由双曲线定义可得，即，又，由余弦定理得，，

设的内切圆半径为*r*，则，

.

故选：D.